Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Lista zadań nr 3. Tydzień rozpoczynający się 23. marca

Zadania

1. A oraz B są zdarzeniami takimi, że: $P(A \cap B) = 1/4$, $P(A^C) = 1/3$, $P(B) = 1/2$. Znaleźć $P(A \cup B)$.
2. Czy prawdą jest, że 13. dzień miesiąca powiązany jest z piątkiem? (1 stycznia 1601 – 31 grudnia 2000)
   ZAŁOŻENIA: rok numer n jest jest przestępny jeżeli $n \equiv_4 0$, pod warunkiem, że $n \not\equiv_{100} 0$; dodatkowo – jeżeli $n \equiv_{400} 0$ (czyli rok 2000), to wcześniejszy warunek jest nieważny. Ile razy w 400-letnim cyklu 13-tym dniem miesiąca był poniedziałek, wtorek, …, niedziela?

   Mówimy, że zmienne X, Y są niezależne, wtedy gdy – w wypadku dyskretnym – spełniony jest warunek $P(X = x_i, Y = y_k) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_k)$.
3. Zmienna X ma rozkład $B(n_1, p)$ a zmienna Y rozkład $B(n_2, p)$. Zmienne są niezależne. Wykazać, że zmienna $Z = X + Y$ ma rozkład $B(n_1 + n_2, p)$.
4. Niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkład Poissona z parametrami λ_1 i λ_2. Wykazać, że zmienna $Z = X + Y$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_1 + \lambda_2$.

   Gęstość 2-wymiarowej zmiennej losowej (X, Y) to $f(x, y) = 3xy$ na obszarze ograniczonym prostymi $y = 0,\ y = x,\ y = 2 - x$.
5. Wyznaczyć gęstości brzegowe $f_1(x), f_2(y)$.
6. Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej brzegowej Y. Czy zmienne X, Y są niezależne? (odpowiedź uzasadnić)
7. Prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie jest równe p. Wykonujemy niezależne doświadczenia do momentu uzyskania 3 sukcesów. Zmienna losowa X to liczba przeprowadzonych prób. Wyznaczyć rozkład zmiennej X, tzn. podać jej funkcję gęstości (ppb). Obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej X.
8. Czytelnie i starannie - bez korzystania z notatek - napisać wielkie i małe greckie litery: alfę α, betę β, (d)zetę ζ, etę η, lambdę λ, chi χ, ksi ξ, fi ϕ, rho ρ.
9. (a) Niech $X \sim U[-2, 2]$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y = |X|$.
   (b) Dla $X \sim U[-1, 1]$ wyznaczyć rozkłady zmiennych $Y = X^3,\ Z = X^2$.
10. Niech X będzie zmienną o rozkładzie geometrycznym ($X \sim \mathrm{Geom}(p)$). Sprawdzić, że $\mathrm{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.
11. Zbiory $A_1, \ldots, A_4$ mają moc – odpowiednio – 40, 32, 20, 50. Losowo wybieramy pewien element (z całości). Wartością zmiennej losowej X jest moc zbioru z którego pochodzi wybrany element. Następnie losowo wybieramy jeden ze zbiorów. Wartością zmiennej losowej Y jest moc wybranego zbioru. Obliczyć $\mathrm{E}(X)$ i $\mathrm{E}(Y)$.

Witold Karczewski